جبور لي عديمة القوى

تعريف :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة التبديلية والواحدية R لنضع

$C^1A = A$

$C^2A = [A, CA] = [A, A]$

$C^3A = [A, C^2A] = [A, [A, A]]$

$\vdots$

$\forall k \in N : C^{k+1}A = [A, C^kA]$

مبرهنة :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ :

① أياً كان $k \in N$ فإن C^kA مثالي جزئي في A

② $A = CA \supseteq C^2A \supseteq \dots \supseteq$ متتالية متناقصة من المثاليات الجزئية في A

البرهان :

① ينتج مباشرة من التعريف

② بالاستقرار حسب n

لأجل $n=2$

$C^2A = [A, CA] = [A, A] \subseteq A = CA$

لأجل $n=3$

$C^3A = [A, C^2A] \subseteq [A, CA] = C^2A$

نفرض أن $\subseteq$ صحيحة من أجل $k+1$

$C^{k+1}A \subseteq C^kA$

نبرهن أن $\subseteq$ صحيحة من أجل $k+2$

$C^{k+2}A = [A, C^{k+1}A] \subseteq [A, C^kA] = C^{k+1}A$

مبرهنة :

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ

① إذا كان I مثالي في A فإن $C^rI \subseteq C^rA$

② أياً كان $n \in N$ فإن $D^nA \subseteq C^{n+1}A$

③ إثبات أنه من أجل $n, m \in N$ فإن $[C^n A, C^m A] \subseteq C^{n+m} A$

البرهان:

① نبرهن بطريقة الاستقراء حسب r

$r=1 \Rightarrow CI = I \subseteq A = CA$

$r=2 \Rightarrow C^2 I = [I, CI] = [I, I] \subseteq [A, A] = [A, CA] = C^2 A$

نفرض أنها صحيحة من أجل $r = k+1$

$C^{k+1} I \subseteq C^{k+1} A$

نبرهن أنها صحيحة من أجل $r = k+2$

$C^{k+2} I = [I, C^{k+1} I] \subseteq [A, C^{k+1} A] = C^{k+2} A$

② بالاستقراء حسب n

$n=0 \Rightarrow D^0 A = A = C^{0+1} A$

$n=1 \Rightarrow D^1 A = [A, A] = [A, CA] = C^{1+1} A$

نفرض أنها صحيحة لأجل k

$D^k A \subseteq C^{k+1} A$

نبرهن أنها صحيحة لأجل $k+1$

$D^{k+1} A = [D^k A, D^k A] \subseteq [A, C^{k+1} A] = C^{k+2} A$

③ الاستقراء حسب n

$n=1$

$[CA, C^m A] = [A, C^m A] = C^{m+1} A$

$n=1$

$[C^2 A, C^m A] = [[A, CA], C^m A] = [C^m A, [A, CA]] \subseteq$

$[A, [CA, C^m A]] + [CA, [C^m A, A]] = [A, C^{m+1} A] +$

$[A, [A, C^m A]] = [A, C^{m+1} A] = C^{m+2} A$

نفرض انه صحيحة لاجل $k+1$ $\quad [C^{k+1}A, C^{m}A] \subseteq C^{m+k+1}A$

نبرهن لاجل $k+2$

$$[C^{k+2}A, C^{m}A] = [[A, C^{k+1}A], C^{m}A]$$

$$= [C^{m}A, [A, C^{k+1}A]] \subseteq [A, [C^{k+1}A]] + [C^{k+1}A, [C^{m}A, A]]$$

$$\subseteq [A, C^{m+k+1}A] + [C^{k+1}A, [A, C^{m}A]] =$$

$$= [A, C^{m+k+1}A] + [C^{k+1}A, C^{m+1}A] = C^{m+k+1}A + C^{k+1+m+1}A = C^{k+2+m}A$$

تعريف :
ليكن جبر لي فوق الحلقة R نقول أنه A (عديم القوى) اذا وجد $n \in N$ بحيث
$C^{n}A = 0$

نتيجة :
كل جبر لي عديم القوى يكون قابل للحل

البرهان :
ينتج مباشرة من ان $D^{n}A \subseteq C^{n}A \,;\ \forall n \in N$

مبرهنة :
كل جبر لي A فوق حقل f بعده 2 قابل للحل وليس عديم القوى

البرهان :
وجدنا سابقاً ان A قابل للحل ؟ نبرهن ان A ليس عديم القوى
لنفرض ان $\{e_1, e_2\}$ قاعدة للجبر A فوق f ! ان $\bar{A} \neq 0$ وبالتالي $(A \neq 0$
سوف نميز حالتين

① الاولى : $[e_1, e_2] = \lambda e_1 \,;\ \lambda \in f$

$z = [x, y]$; $x, y \in A$ وعند $z \in C^2A = [A, CA] = [A, A]$

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ $\quad \alpha_1, \alpha_2 \in f$
$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ $\quad \beta_1, \beta_2 \in f$

$z = [x, y] = \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1, e_2]$

$= \underbrace{[\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1]}_{f \ni b} \lambda e_1 = b e_1$

وبالتالي فإن $C^2A = \{ b e_1 ; b \in f \}$

أي أن C^2A فضاء جزئي في A بعده 1 وعنه $C^2A \neq 0$

$C^3A = [A, C^2A]$

ليكن $z \in C^3A$ عندئذ

$z = [x, y]$; $x \in A$ $\quad y \in C^2A$

$x = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2$ $\quad \alpha_3, \alpha_4 \in f$
$y = \gamma e_1$

$z = [x, y] = -\gamma\alpha_4 \lambda [e_1, e_2] = -\underbrace{\gamma\alpha_4}_{\in f} \lambda e_1$

ومنه $C^3A = \{ w e_1 ; w \in f \}$ فضاء جزئي في A بعده 1 ومنه $C^3A \neq 0$ وبتابع بهذا الشكل نجد أن

$C^2A = C^3A = C^4A = \ldots \neq 0$

ومنه فإن A ليست عديم القوى

انتهت المحاضرة